Algoritmos e Teoria dos Grafos

Exercícios

26 de fevereiro de 2023

Sumário

Os exercícios estão classificados de acordo com a seguinte legenda.

-: exercícios de interesse marginal: complementam o assunto de alguma forma mas podem ser ignorados sem comprometer o entendimento.

@: exercícios programados para discussão em aula: procure fazê-los antes de serem discutidos em aula.

$\star$**:** exercícios prioritários: na impossibilidade de fazer todos, dê prioridade a estes.

#: exercícios mais difíceis e/ou trabalhosos: não comece por estes.

1 Fundamentos

$1^{\star}$. Exiba a fronteira do conjunto $\{d_0, d_1, d_3\}$ no grafo da direita do Exercício 8.

$2^{\star}$. Quantas arestas tem um grafo completo de n vértices? Justifique sua resposta.

$3^{\star}$. Se um vértice tem k vizinhos em G, quantos vizinhos ele tem em $\overline{G}$? Justifique sua resposta.

$4^{\star}$. Quantos grafos diferentes existem com o conjunto de vértices $\{1, \ldots, n\}$? Justifique.

$5^{\#}$. Seja G um grafo. Dados $X \subseteq V(G)$ e $n \in \mathbb{N}$ vamos definir $\Gamma^n_G(X)$ como segue.

$$\Gamma^n_G(X) := \begin{cases} X, & \text{se } n = 0, \\ \Gamma_G(\Gamma^{n-1}_G(X)), & \text{se } n > 0. \end{cases}$$

(a) Exiba os conjuntos $\Gamma^n_G(\{a_0, b_2\})$ para $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, onde G é o grafo da esquerda no Exercício 8.

(b) É verdade que para qualquer grafo G e qualquer conjunto X de seus vértices, existe um valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Gamma^n_G(X) = V(G)$? Justifique.

(c) É verdade que para qualquer grafo G e qualquer conjunto X de seus vértices, existe um valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que $\Gamma^n_G(X) = \Gamma^{n+1}_G(X)$? Justifique.

$6^{\star}$. Seja $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ uma família de subconjuntos de um conjunto A. O *grafo de interseção de* $\mathcal{F}$ é o grafo $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ dado por

$$\begin{aligned} V(\mathcal{I}_{\mathcal{F}}) &:= \mathcal{F}, \\ E(\mathcal{I}_{\mathcal{F}}) &:= \{\{A_i, A_j\} \mid A_i \cap A_j \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

(a) Seja G o grafo interseção de $\binom{\{1,\ldots,5\}}{2}$. Desenhe G.

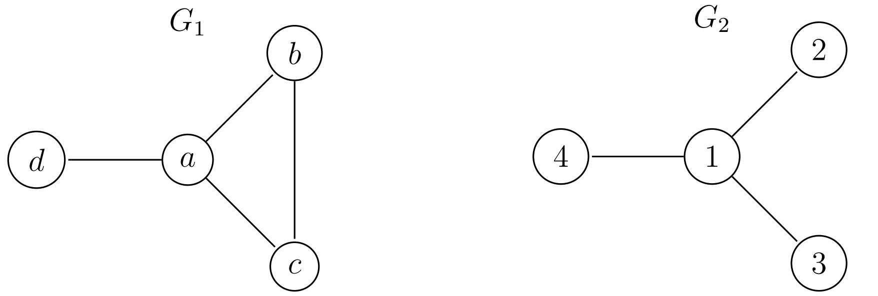
(b) Desenhe $\overline{G}$.

(c) Verifique que $\overline{G}$ é (isomorfo a)o Grafo de Petersen.

Dados inteiros n e k, o complemento do grafo interseção de $\binom{\{1,\ldots,n\}}{k}$ é conhecido como *grafo de Kneser* com parâmetros n e k.

7*. Um grafo G é um *grafo de intervalo* se é o grafo de interseção[1] de um conjunto de intervalos fechados de $\mathbb{R}$.

(a) Os grafos G_1 e G_2 abaixo são grafos de intervalo? Justifique.



(b) Dê um exemplo de um grafo que **não é** grafo de intervalo e prove que seu exemplo está correto.

8*. Prove que os grafos abaixo são isomorfos.

9*. Um grafo é *auto–complementar* se é isomorfo ao seu complemento.

(a) Dê um exemplo de um grafo auto–complementar não trivial.

(b) Prove se G é auto–complementar, então $|V(G)|$ ou $|V(G)| - 1$ é múltiplo de 4.

[1] Veja o Exercício 6

10*. (a) Se G é um grafo de 14 vértices e 25 arestas cujos vértices tem graus 3 ou 5, quantos vértices tem grau 3 e quantos tem grau 5?

(b) Generalize o raciocínio para um grafo de n vértices e m arestas cujos vértices tem graus d_1 ou d_2.

11*. Prove que se G é um grafo satisfazendo

$$\begin{aligned} \delta(G) &> 0, \\ |E(G)| &< |V(G)|, \end{aligned}$$

então G tem (pelo menos) dois vértices de grau 1.

12*. Existe algum grafo não trivial em que todos os vértices tem graus distintos? Justifique.

13. Assim como se define o grau mínimo e o grau máximo, é possível definir o *grau médio* de um grafo G.

(a) Denotando por $\overline{\delta}(G)$ o grau médio de um grafo G, proponha uma expressão para $\overline{\delta}(G)$ em função de $|V(G)|$ e $|E(G)|$.

(b) Prove que, para todo grafo G,

$$\delta(G) \leq \frac{2|E(G)|}{|V(G)|} \leq \Delta(G).$$

14. Proponha uma definição para o conceito de *densidade* de um grafo não trivial de tal maneira que se $\rho(G)$ é a densidade de um grafo não trivial G, então

(a) $\rho(G) = 0$ se e somente se $E(G) = \emptyset$.

(b) $\rho(G) = 1$ se e somente se G é completo.

(c) $\rho(G) = 1 - \rho(\overline{G})$, para todo grafo G.

(d) fixado o número de vértices de um grafo, $\rho(G)$ é estritamente crescente em função do número de arestas, isto é, se $|V(G)| = |V(G')|$, então $\rho(G) > \rho(G')$ se e somente se $|E(G)| > |E(G')|$.

Prove que sua definição satisfaz cada uma destas propriedades.

15. Prove que, para todo grafo G temos

$$M_G^2[v,v] = \delta_G(v), \text{ para todo } v \in V(G).$$

16*. Prove que, se G é um grafo direcionado, então

$$\sum_{v \in V(G)} \delta^+(v) = |A(G)| = \sum_{v \in V(G)} \delta^-(v),$$

17*. Prove que

$$M_{G^T} = (M_G)^T,$$

para todo grafo direcionado G, onde M^T denota a matriz transposta da matriz M.

18. Prove que, para todo grafo direcionado G temos

$$M_G M_G^T[v,v] = \delta_G^+(v), \text{ para todo } v \in V(G).$$

2 Representação Computacional

19*. Descreva como computar eficientemente o grafo transposto de um grafo direcionado G, quando G é representado

(a) por listas de adjacência, ou

(b) pela matriz de adjacência.

Expresse a eficiência de ambas as soluções em termos assintóticos em função do tamanho do grafo G.

20. Considere a idéia de evitar o desperdício de espaço na representação da matriz de adjacência de um grafo G com $V(G) = \{1, \ldots, n\}$ usando um vetor m contendo somente os elementos abaixo da diagonal principal de M_G, de tal maneira que

$$M_G[u, v] = \begin{cases} m[f(u, v)], & \texttt{se } u > v, \\ 0, & \texttt{se } u = v, \\ m[f(v, u)], & \texttt{se } u < v, \end{cases}$$

onde $f\colon \{(u, v) \in V(G) \times V(G) \mid u < v\} \to \{0, \ldots, N(n) - 1\}$ é a função que faz a correspondência entre os elementos de M_G e m, e $N(n)$ é o tamanho do vetor m.

(a) Dê uma expressão[2] para $N(n)$.

(b) Dê uma expressão[3] para $f(u, v)$.

(c) Dê uma expressão[4] para $f^{-1}(k)\colon 0 \leq k < N(n)$.

(d) Escreva a função

```
unsigned int vizinho(unsigned int *m, unsigned int u, unsigned int v);
```

que devolve o valor de $M_G[u, v]$, onde M_G é representado pelo vetor `m` tal como descrito acima.

21*. Suponha que a representação de um número inteiro consome i bytes e a representação de um apontador consome a bytes e considere o problema de representar um grafo ponderado de n vértices e m arestas nesta linguagem.

[2]**Sugestão:** Descreva $N(n)$ por meio de uma recorrência e daí resolva esta recorrência.
[3]**Sugestão:** Observe que $f(u, 1) = N(u - 1)$ e que $f(u, v) = f(u, 1) + v - 1$.
[4]**Sugestão:** Observe que $f(u, 1) \leq f(u, v) \leq f(u, u - 1)$.

(a) Expresse o total de memória consumido na representação do grafo em função de i, a, n e m ao usar

   i. matriz de adjacência

   ii. listas de adjacência

(b) Indique como decidir, em função de i, a, n e m, qual das duas representações ocupa menos memória.

3 Subgrafos

22*. Dê um exemplo de um grafo G com subgrafos H_1, H_2 e H_3 tais que

(a) o grafo H_1 é um subgrafo induzido por vértices;

(b) o grafo H_2 é um subgrafo induzido por arestas mas não é um subgrafo induzido por vértices;

(c) o grafo H_3 não é um subgrafo induzido por arestas nem por vértices.

23. Seja G um grafo e seja X um conjunto de vértices de G. É verdade que todo subgrafo de G induzido por vértices pode ser obtido a partir de G pela remoção de um conjunto de vértices?

24. Se G é um grafo e α e β são arestas de G, é verdade que

$$(G - \alpha) - \beta = (G - \beta) - \alpha?$$

Justifique.

25*. Seja G um grafo e seja X um conjunto de arestas de G. É verdade que

$$G - X = G[E(G) - X]?$$

Justifique.

É verdade que todo subgrafo de G induzido por arestas pode ser obtido a partir de G por uma sequência de remoções de arestas?

26⋆. Seja G um grafo e seja v um vértice de G. Prove que

$$|E(G - v)| = |E(G)| - \delta_G(v).$$

27. Seja G um grafo e sejam $A \subseteq E(G)$ e $V = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$.

É verdade que $G[A] = G[V]$? Justifique.

28⋆. Prove que se G é um grafo, então,

(a) Um conjunto X é independente em G se e somente se X é clique em $\overline{G}$.

(b) $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

29#. Considere o seguinte algoritmo guloso para computar um conjunto independente de um grafo G.

```
Independente(G)
  I ← ∅
  Enquanto V(G) ≠ ∅
      v ← vértice de grau mínimo em G
      acrescente v a I
      remova v e Γ_G(v) de G
  Devolva I
```

(a) Sejam n e Δ, respectivamente, o número de vértices no grafo G e seu grau máximo ao início do algoritmo. Prove que, ao início do laço, sempre é verdade que[5] $n \leq |V(G)| + |I|(\Delta + 1)$.

(b) Conclua daí que $\alpha(G) \geq \dfrac{|V(G)|}{\Delta(G) + 1}$, para todo grafo G,

(c) Conclua também que $\omega(G) \geq \dfrac{|V(G)|}{|V(G)| - \delta(G) + 1}$, para todo grafo G,

[5] **Sugestão:** Para facilitar a expressão do seu raciocínio, defina G_i e I_i como os valores das variáveis G e I no algoritmo ao início da i-ésima iteração

30#. Prove que todo grafo com pelo menos 6 vértices tem uma clique ou um conjunto independente com 3 vertices.

[6]

31⋆. Prove que para todo grafo G, $\omega(G) \leq \Delta(G) + 1$.

32⋆. Seja H um subgrafo de um grafo G. Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou não, justificando sua resposta em cada caso.

(a) $\alpha(H) \leq \alpha(G)$?

(b) $\alpha(G) \leq \alpha(H)$?

(c) $\omega(G) \leq \omega(H)$?

(d) $\omega(H) \leq \omega(G)$?

33@. Prove que o problema de determinar o tamanho máximo de um conjunto independente de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$–Difícil[7].

34@. Prove que o problema de determinar se um grafo dado é subgrafo induzido de outro grafo também dado é um problema $\mathcal{NP}$–Difícil[8].

35⋆. Prove que um grafo G é bipartido se e somente se $E(G) = \partial_G(X)$ para algum $X \subseteq V(G)$ e que, neste caso, $\{X, V(G) - X\}$ é uma bipartição de G.

36⋆. Prove que um grafo bipartido de n vértices tem no máximo $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ arestas.

---

[6] **Sugestão:**
Pense na seguinte formulação, equivalente à do enunciado: qualquer coloração das arestas de um grafo completo de 6 vértices com 2 cores vai ter um triângulo monocromático como subgrafo.

[7] **Sugestão:** Pense em como resolver o Problema do Conjunto Independente a partir de um algoritmo para este problema

[8] **Sugestão:** Pense em como resolver o Problema do Conjunto Independente a partir de um algoritmo para este problema

37. Prove que o complemento de um grafo bipartido G é conexo se e somente se G não é (bipartido) completo.

38[@]. Prove que o problema de determinar o número cromático de um grafo é $\mathcal{NP}$–Difícil.

39*. Prove que o algoritmo abaixo nem sempre devolve uma coloração mínima do grafo G.

Colore(G)

$\mathcal{C} \leftarrow \emptyset$
Enquanto *existe vértice de G que não pertence a nenhum conjunto em $\mathcal{C}$*
  $v \leftarrow$ vértice de G que não pertence a nenhum conjunto em $\mathcal{C}$
  Se *v não tem vizinho em algum conjunto $K \in \mathcal{C}$*
    acrescente v ao conjunto K
  Senão
    acrescente o conjunto $\{v\}$ a $\mathcal{C}$
Devolva $\mathcal{C}$

---

4 Passeios, Caminhos e Ciclos

40*. Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência, considerada como uma matriz booleana.

(a) Prove[9] que, para todo $k \in \mathbb{N}$, e todo $u, v \in V(G)$,

$M_G^k[u, v] = 1$ se e somente se existe passeio de tamanho k de u a v em G

(b) Conclua que

$$M_G^*[u, v] = 1 \text{ se e somente se existe passeio de } u \text{ a } v \text{ em } G.$$

41*. Baseado no enunciado do Exercício 40, proponha um algoritmo que recebe como entrada um grafo G e dois de seus vértices, u e v e devolve a distância de u a v em G.

42*. Baseado no enunciado dos Exercícios 40 e 40, proponha um algoritmo que computa o diâmetro de um grafo dado.

43*. Seja M uma matriz quadrada booleana e seja

$$M^* := \sum_{k \in \mathbb{N}} M^k.$$

Prove que

$$M^* = \sum_{k=0}^{n} M^k, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}.$$

44*. Seja G um grafo e seja M_G sua matriz de adjacência, considerada como uma matriz de inteiros. Prove[10] que, para todo $k \in \mathbb{N}$, e todo $u, v \in V(G)$, $M_G^k[u, v]$ é o número de passeios de tamanho k de u a v em G.

[9] **Sugestão:** Indução em k.
[10] **Sugestão:** Indução em k.

45#. Um estudante propôs o seguinte algoritmo para contar o número de triângulos de um grafo G dado.

NumeroTriangulos(G)

$M \leftarrow$ matriz de adjacência de G
$T \leftarrow M^3$
Devolva $\frac{1}{6}\sum_{v\in V(G)} T[v,v]$

(a) Prove que o algoritmo está correto[11].

(b) Proponha uma modificação do algoritmo para contar o número de ciclos direcionados de tamanho 3 num grafo direcionado.

46*. Um grafo e seu complemento podem ser

(a) ambos conexos?

(b) ambos desconexos?

Justifique.

47. Descreva em palavras os grafos k–regulares para $k \in \{0, 1, 2\}$.

48@. Prove que um grafo é bipartido se e somente se não tem passeios de paridades diferentes com as mesmas pontas.

49. Formule e prove uma versão para grafos direcionados do enunciado do Exercício 40.

50. Formule e prove uma versão para grafos direcionados do enunciado do Exercício 44.

51@. Prove que todo segmento de caminho mínimo em um grafo G é caminho mínimo em G.

52#. Prove que se P e Q são dois caminhos de tamanho máximo em um grafo conexo G, então P e Q tem um vértice em comum.

[11] **Sugestão:** Use o resultado enunciado no Exercício 44.

53. Seja G um grafo conexo e seja P um caminho de tamanho máximo em G. Prove[12] que o tamanho de um caminho de tamanho máximo em $G - V(P)$ é menor que $|P|$.

54$^{@}$. Prove que se P é um caminho direcionado maximal em um grafo direcionado G, então

- todos os vizinhos de entrada de seu vértice inicial estão em P, e
- todos os vizinhos de saída seu vértice final estão em P.

55. Seja G um grafo direcionado sem laços e seja $m := \min\{\delta^-(G), \delta^+(G)\}$. Prove que

(a) o grafo G tem caminho direcionado de tamanho m.

(b) se $m > 0$, então G tem ciclo direcionado de tamanho pelo menos $m + 1$.

56*. Prove que todo passeio direcionado de tamanho mínimo entre dois vértices de um grafo direcionado é um caminho direcionado.

57*. Prove que o grafo condensado de um grafo direcionado é um grafo direcionado acíclico.

58*. É verdade que existe ciclo em um grafo G se e somente se existem passeios distintos com as mesmas pontas em G? Justifique.

59*. É verdade que existe ciclo num grafo se e somente se existe um passeio fechado nesse grafo? Justifique.

60*. Prove que $\gamma(G) > 3$ se e somente se as vizinhanças de u e v são disjuntas para toda aresta $\{u, v\} \in E(G)$.

61*. Prove que os componentes de um grafo G são todos caminhos ou ciclos se e somente se $\Delta(G) \leq 2$.

[12] **Sugestão:** use o Exercício 52

62*. Prove que todo grafo G tem

(a) caminho de tamanho (pelo menos) $\delta(G)$ e,

(b) ciclo de tamanho pelo menos $\delta(G) + 1$, se $\delta(G) \geq 2$.

63*. Prove que[13], se $k > 1$, então todo grafo k–regular tem

(a) um caminho de tamanho k;

(b) um ciclo de tamanho pelo menos $k + 1$.

64*. Prove que se um grafo G não é acíclico, então

$$\text{diam}(G) \geq \left\lfloor \frac{\gamma(G)}{2} \right\rfloor.$$

65*. Prove que todo grafo direcionado acíclico tem fonte.

66$^@$. Prove que determinar o tamanho do maior ciclo de um grafo é um problema $\mathcal{NP}$-difícil.

67*. Seja G um grafo não vazio e seja $v \in V(G)$. Seja G_v o grafo obtido ao acrescentar-se a G três novos vértices, v', u e w e as arestas $\{u, v\}$, $\{w, v'\}$ e $\{\{v', r\} \mid r \in \Gamma_G(v)\}$. Prove que G é hamiltoniano se e somente se G_v tem caminho hamiltoniano.

68*. Prove que decidir se um grafo tem caminho hamiltoniano é um problema $\mathcal{NP}$–difícil[14].

69*. Prove que o problema de decidir se um grafo direcionado tem caminho hamiltoniano é $\mathcal{NP}$–difícil.

70*. Um *grafo direcionado hamiltoniano* é um grafo direcionado que tem ciclo hamiltoniano direcionado.

[13] **Sugestão:** Use o Exercício 62.
[14] **Sugestão:** Use o Exercício 67

Seja G um grafo e seja $D(G)$ o grafo direcionado dado por

$$\begin{aligned} V(D(G)) &= V(G), \\ A(D(G)) &= \bigcup_{\{u,v\} \in E(G)} \{(u,v),(v,u)\}. \end{aligned}$$

(a) Prove que G é hamiltoniano se e somente se $D(G)$ é hamiltoniano e conclua, a partir daí, que o problema de decidir se um grafo direcionado é hamiltoniano é $\mathcal{NP}$–Difícil.

(b) Conclua que o problema de decidir se um grafo direcionado é hamiltoniano é $\mathcal{NP}$–Difícil.

71*. Seja G um grafo e seja G' o grafo que se obtém ao acrescentar a G um novo vértice v e uma aresta ligando v a cada vértice de G.

Prove que G' é hamiltoniano se e somente se G tem caminho hamiltoniano.

72*. Seja G um grafo direcionado e seja (G', w) um grafo direcionado com pesos nas arestas completo com o mesmo conjunto de vértices de G onde w é dada por

$$w(u,v) = \begin{cases} 0, & \textsf{se } (u,v) \in A(G), \\ 1, & \textsf{se } (u,v) \notin A(G) \end{cases}$$

Prove que G é hamiltoniano se e somente se a resposta da instância (G', w) do problema do Caixeiro Viajante tem peso 0. Conclua daí que o problema do Caixeiro Viajante é $\mathcal{NP}$-difícil.

73*. Considere o seguinte algoritmo para o Problema do Caixeiro Viajante

```
CV(G, w)
---------------------------------------------------------------
(i, f) ← arco de peso mínimo em G
P ← (i, f)
Enquanto V(P) ≠ V(G)
    u ← origem de um arco de peso mínimo em ∂⁻(i) fora de V(P)
    v ← destino de um arco de peso mínimo em ∂⁺(f) fora de V(P)
    Se w(u, i) ≤ w(f, v)
        i ← u
        acrescente i ao início de P
    Senão
        f ← v
        acrescente f ao final de P
    acrescente i ao final de P
    Devolva P
```

(a) Mostre que o algoritmo está **errado**, exibindo uma instância do Problema do Caixeiro Viajante para a qual o algoritmo não computa uma resposta correta.

(b) Mostre que o algoritmo está **muito errado**, provando que sua resposta pode ficar arbitrariamente longe da resposta correta, isto é, prove que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe uma instância (G, w) do Problema do Caixeiro Viajante tal que

$$\mathrm{OPT}(G, w) < w(\mathsf{CV(G, w)}) - n,$$

onde $\mathrm{OPT}(G, w)$ denota o peso de uma solução da instância (G, w).

5 Trilhas e Grafos Eulerianos

74$^{@}$. Prove que um grafo conexo tem trilha euleriana aberta se e somente se tem exatamente dois vértices de grau ímpar.

75*. Um grafo conexo onde todos os vértices tem grau par pode ter aresta de corte[15]? Justifique.

[15]**Sugestão:** considere um componente de $G - e$ onde G é um grafo como no enunciado e e é uma aresta de corte em G.

6 Árvores, Florestas e Arborescências

76@. Prove que todo grafo conexo com n vértices e $n-1$ arestas é árvore[16].

77⋆. Prove que o grafo G é uma floresta se e somente se

$$|E(G)| = |V(G)| - |\mathcal{C}(G)|.$$

78⋆. Prove que toda árvore T tem (pelo menos) $\Delta(T)$ folhas.

79⋆. Prove que se T é uma árvore então

$$|\mathcal{C}(T - v)| = \delta_T(v),$$

para todo $v \in V(T)$.

80⋆. É verdade que todo grafo de n vértices com n (ou mais) arestas tem ciclo? Justifique.

81#. Um vértice v é *central* em um grafo G se a maior distância de v a qualquer outro vértice de G é a menor possível, isto é, se

$$\max \{d_G(v, u) \mid u \in V(G)\}$$

é mínimo.

(a) Seja T uma árvore com pelo menos 3 vértices e seja $T' = T - F$, onde F é o conjunto das folhas de T. Prove que T e T' tem os mesmos centros,

(b) Conclua daí que toda a árvore tem um único centro ou tem dois centros vizinhos.

82. Prove que um grafo direcionado G tem arborescência geradora se e somente se G tem um vértice r a partir do qual todo vértice de G é alcançável.

83⋆. Prove que o grafo subjacente de uma árborescência é uma árvore.

[16] **Sugestão:** Use o Exercício 11.

7 Cortes e Conectividade

84*. É possível que toda aresta de um grafo não trivial seja de corte? Justifique sua resposta e, em caso positivo, caracterize tais grafos.

85*. Prove que um grafo G é conexo se e somente se

$$\partial_G(X) \neq \emptyset, \text{ para todo } \emptyset \subset X \subset V(G).$$

86. Prove que um grafo direcionado G é fortemente conexo se e somente se

$$\partial_G^+(X) \neq \emptyset, \text{ para todo } \emptyset \subset X \subset V(G).$$

87*. É possível que todo vértice de um grafo não trivial seja de corte? Justifique sua resposta e, em caso positivo, caracterize tais grafos.

88*. Dê um exemplo de um grafo conexo G para o qual

$$\kappa(G) < \lambda(G) < \delta(G).$$

89*. É verdade que

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G),$$

para todo grafo conexo G?

Justifique.

90. Seja G um grafo, T uma árvore geradora de G e $v \in V(G)$.

   (a) É verdade que se v tem grau maior que 1 em T, então v é vértice de corte em G? Justifique.

   (b) É verdade que se v é vértice de corte em G então v tem grau maior que 1 em T? Justifique.

91. Prove que todo vértice de corte em um grafo é vértice de corte em qualquer árvore geradora deste grafo.

92*. Considere o jogo em que o jogador recebe um grafo conexo. O objetivo é remover os vértices deste grafo, um a um, sem desconectar o grafo em nenhum momento. O jogador vence se conseguir remover todos os vértices.

(a) Sempre é possível vencer o jogo[17]? Justifique.

(b) Descreva um algoritmo para vencer o jogo nos casos em que é possível vencer.

93$^\#$. Prove que um vértice de um grafo G faz parte de dois blocos distintos de G se e somente é vértice de corte.

94*. É verdade que se u e v são vértices de corte vizinhos em um grafo então a aresta $\{u, v\}$ é de corte neste grafo? Justifique.

95*. Um vértice de corte em um grafo conexo pode ser folha de uma árvore geradora deste grafo? Justifique.

[17] **Sugestão:** Use o ex. 87

8 Busca em Largura

96*. Sejam

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1, 4, 8\}, \\ A_2 &= \{1, 5, 9\}, \\ A_3 &= \{2, 4, 6\}, \\ A_4 &= \{2, 5, 7\}, \\ A_5 &= \{3, 6, 10\} \text{ e} \\ A_6 &= \{3, 7, 8\} \end{aligned}$$

e seja G o grafo de interseção[18] de $\{A_1, \ldots, A_6\}$.

(a) Faça um desenho deste grafo.

(b) Faça uma busca em largura em G a partir do vértice A_1 e apresente

 i. os níveis de cada vértice, e

 ii. as arestas que não estão na árvore enraizada resultante desta busca.

(c) Baseado nesta busca, diga se G é conexo. Justifique sua resposta.

(d) Baseado nesta busca, diga se G é bipartido. Justifique sua resposta.

97*. Seja T uma árvore de distâncias mínimas de raiz r de um grafo G. Prove que

$$\operatorname{diam}(T) \leq 2\operatorname{diam}(G).$$

98*. Prove que se (T, r) é a árvore enraizada resultante de uma busca em largura em um grafo conexo G, então rTv é um caminho mínimo em G para todo $v \in V(G)$.

99*. Prove que se (T, r) é árvore enraizada resultante de uma busca em largura sobre um grafo conexo G, então

$$|d_G(r, u) - d_G(r, v)| \leq 1, \text{ para todo } \{u, v\} \in E(G - T).$$

[18] Veja o Exercício 6.

100*. Seja (T, r) a árvore enraizada resultante de uma busca em largura sobre um grafo conexo G. Prove que G é bipartido se e somente se $d(r, u)$ e $d(r, v)$ tem paridades diferentes para toda aresta $\{u, v\} \in G - E(T)$.[19]

101*. Proponha um algoritmo que recebe um grafo de n vértices e m arestas e responde se este grafo é bipartido em tempo $O(n + m)$.

102*. Seja (T, r) a árvore enraizada resultante de uma busca em largura sobre um grafo conexo G. Prove que G é bipartido se e somente se $d(r, u) \neq d(r, v)$ para toda aresta $\{u, v\} \in G - E(T)$.

103*. Proponha um algoritmo baseado no algoritmo de busca em largura para detectar um ciclo de tamanho ímpar em um grafo, caso exista.

104*. Prove que se F é a floresta direcionada resultante de uma busca em largura então toda aresta em $G - S(F)$ é cruzada com relação a F.

105*. Prove que se T é a árvore enraizada de raiz r resultante de uma busca em largura em um grafo conexo G, então

$$d_T(r, v) = d_G(r, v), \text{ para todo } v \in V(G).$$

106*. Caracterize as árvores enraizadas resultantes de uma busca em largura em um grafo bipartido completo.

9 Os Algoritmos de Prim e Dijkstra

107*. É verdade que se um grafo com pesos (G, w) é tal que os pesos das arestas são todos distintos entre si então o grafo tem uma única árvore geradora mínima? Justifique.

108*. Prove que se (G, w) é um grafo conexo com pesos não negativos então existe uma árvore de caminhos mínimos geradora de G enraizada em v para todo $v \in V(G)$.

[19] **Sugestão:** Use os resultados dos Exercícios 98 e 99

109*. Seja T uma árvore de distâncias mínimas de raiz r de um grafo com pesos (G, w). Prove que

$$\text{diam}(T) \leq 2\text{diam}(G).$$

110*. O seguinte algoritmo foi proposto para determinar um caminho de comprimento máximo em um grafo conexo com pesos positivos. O algoritmo está correto? Justifique.

```
CaminhoMaisComprido(G, w)
  P ← caminho vazio
  Para cada r ∈ V(G)
      (T, r) ←
        árvore enraizada obtida pelo Algoritmo de Dijkstra a partir do vértice r
      u ← vértice mais distante de r em T
      v ← vértice de V(T) − V(rTu) mais distante de r em T
      Se |uTv| > |P|
          P ← uTv
  Devolva P
```

10 Busca em Profundidade

111*. Caracterize

(a) as árvores enraizadas produzidas por busca em largura em um grafo completo, e

(b) as árvores enraizadas produzidas por busca em profundidade em um grafo completo.

112*. Caracterize as árvores enraizadas resultantes de uma busca em profundidade de um grafo bipartido completo.

113*. Um estudante propõe o seguinte algoritmo para encontrar um caminho de comprimento máximo em um grafo.

CaminhoMaisLongo(G)

---

encontre um vértice r de G que não é de corte
$(T, r) \leftarrow$
 árvore enraizada de busca em profundidade em G a partir de r
Devolva *caminho de distância máxima de* r *a uma folha de* T

O algoritmo está correto? Justifique.

114*. Considere a seguinte ideia para determinar se um grafo de n vértices tem ciclo hamiltoniano.

> Se o grafo tem ciclo hamiltoniano, então uma busca em profundidade "iniciada pelo vértice certo" vai encontrá-lo, pois haverá um vértice v a distância $n-1$ do vértice inicial r e v será vizinho de r.
>
> Para garantir que o ciclo hamiltoniano seja encontrado, será suficiente executar n buscas em profundidade, cada uma iniciando por um dos vértices do grafo. Se nenhuma delas localizar um ciclo hamiltoniano é porque o grafo não tem ciclo hamiltoniano.

A ideia está correta? Justifique sua resposta.

11 Busca em Grafos Direcionados

115*. Explique como decidir em tempo $O(n+m)$ se um grafo direcionado com n vértices e m arcos é acíclico e, em caso negativo, encontrar um ciclo direcionado.

116*. Apresente um algoritmo que recebe um grafo direcionado G e devolve a arborescência resultante de uma busca em largura em G^T. Para cada $v \in V(G)$, as vizinhanças de entrada e saída de v estão disponíveis.

117*. Apresente um algoritmo que recebe um grafo direcionado G e devolve a arborescência resultante de uma busca em profundidade em G^T. Para cada $v \in V(G)$, as vizinhanças de entrada e saída de v estão disponíveis.

118*. Seja G um grafo direcionado e considere uma execução do algoritmo $\mathsf{BuscaProfundidade}(G)$. Seja F a floresta direcionada induzida pelos valores de $v.\mathsf{pai} \mid v \in V(G)$ e, para cada $v \in V(G)$ sejam $v.\mathsf{pre}$ e $v.\mathsf{pos}$ os índices de pré–ordem e pós–ordem computados.

Prove que

(a) o arco (u,v) é arco de F ou arco de avanço com relação a F, se e somente se $u.\mathsf{pre} < v.\mathsf{pre} < v.\mathsf{pos} < u.\mathsf{pos}$.

(b) o arco (u,v) é arco cruzado com relação a F, se e somente se $v.\mathsf{pre} < v.\mathsf{pos} < u.\mathsf{pre} < u.\mathsf{pos}$.

(c) o arco (u,v) é arco de retorno com relação a F, se e somente se $v.\mathsf{pre} < u.\mathsf{pre} < u.\mathsf{pos} < v.\mathsf{pos}$.

(d) A ordem $<$ induzida sobre $V(G)$ dada por

$$u < v := u.\mathsf{pre} < v.\mathsf{pre}, \text{ para todo } u, v \in V(G),$$

é uma pré–ordem de F.

(e) A ordem $<$ induzida sobre $V(G)$ dada por

$$u < v := u.\mathsf{pos} < v.\mathsf{pos}, \text{ para todo } u, v \in V(G),$$

é uma pós–ordem de F.

119*. Prove que um grafo direcionado G é acíclico se e somente se qualquer floresta direcionada resultante de uma busca em profundidade sobre G não tem arcos de retorno.

120*. Prove que um grafo direcionado G admite ordenação topológica se e somente se é acíclico.

121*. Modifique o algoritmo de Ordenação Topológica discutido em aula de maneira que ele receba como entrada um grafo direcionado G e devolva,

(a) uma ordenação topológica de G, se G é acíclico, ou

(b) um ciclo direcionado de G, caso contrário.

122*. O seguinte algoritmo, conhecido como *Algoritmo de Kahn*, que recebe um grafo direcionado G e devolve (uma lista com) a ordenação topológica de G ou um subgrafo de G sem fontes, caso G seja cíclico.

Qual o seu tempo de execução no pior caso (em termos assintóticos) em função de $|V(G)|$ e $|E(G)|$?

Com relação ao desempenho de pior caso (em termos assintóticos) como ele se compara ao algoritmo discutido em aula?

```
OrdenaTopologica(G)
---------------------------------------------
Se V(G) = ∅
    Devolva ()
Se G não tem fonte
    Devolva G
v ← fonte de G
R ← Ordena(G − v)
Se R é uma lista
    acrescente v ao início de R
Devolva R
```

```
Ordena(G)
---------------------------------------------
Q ← lista vazia
Enquanto V(G) ≠ ∅
    Se G não tem fonte
        Devolva G
    v ← fonte de G
    remova v de G e enfile em Q
Devolva Q
```

123*. Um estudante argumenta que um algoritmo mais simples do que o estudado para ordenar topologicamente um grafo direcionado seria o que devolve a pré–ordem induzida por uma busca em profundidade sobre o grafo a partir de suas fontes. O estudante está correto? Justifique.

124*. Prove que $(v_1, \dots, v_n)$ é uma ordenação topológica de um grafo direcionado acíclico G se e somente se $(v_n, \dots, v_1)$ é uma ordenação topológica de G^T.

125*. Seja G um grafo direcionado e seja $r \in V(G)$. Sejam ainda T e T', respectivamente, arborescências maximais de G e G^T com raiz r. Prove que $G[V(T) \cap V(T')]$ é componente forte conexo de G.

12 Emparelhamentos

126*. Seja M um emparelhamento em um grafo G e seja P um caminho M–aumentante. Prove que

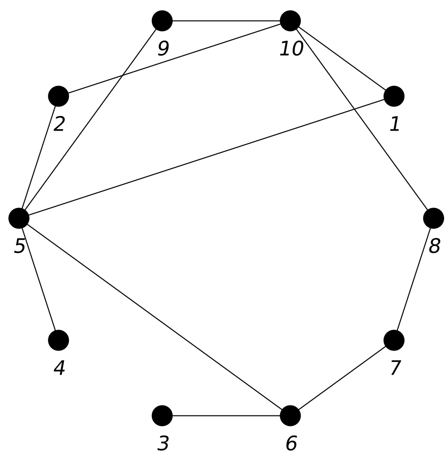
(a) O conjunto $M \oplus E(P)$ é um emparelhamento em G.

(b) $|M \oplus E(P)| = |M| + 1$.

127*. Seja G um grafo bipartido e seja $X \subseteq V(G)$. O Teorema de Hall afirma que, se não é possível cobrir o conjunto X por um emparelhamento, então $|\Gamma_G(S)| < |S|$ para algum $S \subseteq X$.

Explique como modificar o algoritmo que computa um emparelhamento máximo num grafo bipartido discutido em aula de maneira que, se o emparelhamento devolvido não cobre todos os vértices de G, então o algoritmo devolve também um conjunto $S \subseteq V(G)$ satisfazendo $|\Gamma_G(S)| < |S|$.

128*. Prove, usando o Teorema de Hall, que o grafo abaixo não tem emparelhamento que cobre todos os vértices.



129*. Seja G um grafo e sejam M_1 e M_2 dois emparelhamentos em G. É verdade que o grafo $G[M_1 \cup M_2]$ é bipartido? Justifique.

13 Distâncias entre Todos os Pares de Vértices

130*. Seja (G, w) um grafo com pesos nas arestas, sendo $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Prove que

$$d_{G,w}(i,j,k) = \begin{cases} \infty, & \textsf{se } k = 0 \textsf{ e } (v_i, v_j) \notin G, \\ w(v_i, v_j), & \textsf{se } k = 0 \textsf{ e } (v_i, v_j) \in G, \\ \min\{d_{G,w}(v_i, v_j, k-1), & \\ d_{G,w}(v_i, v_k, k-1) + d_{G,w}(v_k, v_j, k-1)\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

para todo $i, j \in [1..n]$ e todo $k \in [0..n]$, onde $d_{G,w}(i,j,k)$ denota o peso de um caminho mínimo de v_i a v_j em (G, w) cujos vértices internos estão em $\{v_1, \ldots, v_k\}$.

131*. Seja G um grafo direcionado com pesos nas arestas, sendo $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, e seja M a matriz indexada por $[1..n] \times [1..n] \times [0..n]$ dada por

$$M[i,j,k] = \begin{cases} 0, & \textsf{se } k = 0 \textsf{ e } (v_i, v_j) \notin G, \\ 1, & \textsf{se } k = 0 \textsf{ e } (v_i, v_j) \in G, \\ M[i,j,k-1] \vee (M[i,k,k-1] \wedge M[k,j,k-1]), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Prove que $M[i,j,k] = 1$ se e somente se existe caminho direcionado de v_i a v_j em G cujos vértices internos estão em $\{1, \ldots, k\}$, para todo $i, j \in [1..n]$ e todo $k \in [0..n]$.

132*. Uma certa biblioteca de rotinas para grafos implementa os algoritmos de Dijkstra e de Floyd–Warshall. Após alguma experimentação um programador concluiu que

$$\begin{aligned} dm \lg n &\leq T_D(n,m), \\ T_F(n) &\leq fn^3, \end{aligned}$$

onde d e f são constantes e $T_D(n,m)$ e $T_F(n)$ são os tempos de execução das implementações dos algoritmos de Dijkstra e de Floyd–Warshall, respectivamente, para um grafo com n vértices e m arestas.

O programador deseja implementar uma nova rotina para computar as distâncias entre todos os pares de vértices de um grafo que escolhe, em função do número de arestas e vértices do grafo, qual dos algoritmos usar.

Como deve ser feito o teste para tomar esta decisão? Justifique sua resposta.

133⋆. Seja G um grafo direcionado com pesos e seja $(v_1, \ldots, v_n)$ uma ordenação de $V(G)$.

Dados $i, j \in [1..n]$ e $k \in [0..n]$, definimos o grafo

$$G(i, j, k) := G[\{v_i, v_j\} \cup \{v_1, \ldots, v_k\}]$$

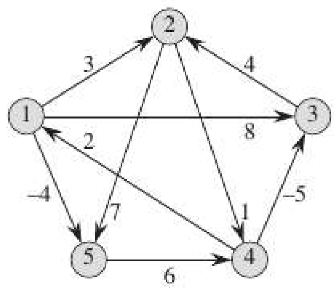
(a) É verdade que os grafos $G(i, j, k)$ são conexos para todo $i, j \in [1..n]$ e todo $k \in [0..n]$? Justifique.

(b) É verdade que P é (i, j, k)-caminho em G se e somente se é caminho em $G(i, j, k)$ para todo $i, j \in [1..n]$ e todo $k \in [0..n]$? Justifique.

134⋆. Seja G um grafo direcionado conexo com pesos e seja $(v_1, \ldots, v_n)$ uma ordenação de $V(G)$. Dados $i, j \in [1..n]$ e $k \in [0..n]$, definimos o grafo

$$G(i, j, k) := G[\{v_i, v_j\} \cup \{v_1, \ldots, v_k\}]$$

(a) Desenhe os grafos $G(v_1, v_5, k)$ para $0 \le k \le 5$, onde G é o grafo abaixo.



(b) É verdade que os grafos $G(i, j, k)$ são conexos para todo $i, j \in [1..n]$ e todo $k \in [0..n]$? Justifique.

Referências